

Roll No.

94106

**B. Sc. Mathematics 6th Semester
Examination – May, 2023
REAL AND COMPLEX ANALYSIS**

Paper : 12BSM-361

Time : Three hours [Maximum Marks : 40]

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनके पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt five questions in all, selecting one question from each Section. Question No. 9 (Section-V) is compulsory. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

SECTION - I

खण्ड - I

1. (a) Find the Jacobian of u, v, w w. r. t. x, y, z given that
 $u = x + y + z, v^3 = yz + zx + xy, w^5 = xyz.$ 4
 x, y, z के सापेक्ष u, v, w का जैकोबियन ज्ञात करें, दिया है कि
 $u = x + y + z, v^3 = yz + zx + xy, w^5 = xyz।$

94106-8960-(2-7)(Q-9)(23)

P. T. O.

(b) Prove that :

4

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{a^n(1+a)^m\Gamma(m+n)}$$

सिद्ध करें कि :

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{a^n(1+a)^m\Gamma(m+n)}$$

2. (a) Show that the volume of the tetrahedron bounded by the planes $x = 0, y = 0, z = 0$ and $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ is $\frac{abc}{6}$. 4

दिखाइए कि समतलों $x = 0, y = 0, z = 0$ तथा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ से परिबद्ध चतुष्फलक का आयतन $\frac{abc}{6}$ है।

- (b) Change the order of integration and evaluate : 4

$$\int_0^4 \int_y^4 \frac{xdxdy}{x^2 + y^2}$$

एकीकरण के क्रम को बदलें और मूल्यांकन करें :

$$\int_0^4 \int_y^4 \frac{xdxdy}{x^2 + y^2}$$

94106-5350-(P-7)(Q-9)(23) (2)

SECTION - II

खण्ड - II

3. (a) Find the Fourier series expansion of $f(x) = x \sin x$ in the interval $[-\pi, \pi]$. 4

अंतराल $[-\pi, \pi]$ में $f(x) = x \sin x$ का फूरियर श्रृंखला विस्तार ज्ञात करें।

- (b) Find the Fourier series expansion for

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 1, & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad 4$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{के लिए } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{के लिए } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{के लिए } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \text{ के लिए फूरियर}$$

श्रृंखला विस्तार ज्ञात करें।

4. (a) Find the half-range cosine series for $f(x) = x^2$ in the interval $0 \leq x < \pi$. 4

अंतराल $0 \leq x \leq \pi$ में $f(x) = x^2$ के लिए हाफ रेंज कोसाइन को ज्ञात करें।

- (b) Given the series $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$, show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ using Parseval's identity.} \quad 4$$

श्रृंखला $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ दिया गया है, पारसेवल की

पहचान का उपयोग करके दिखाइए $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ।

SECTION - III

खण्ड - III

5. (a) Show that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin. 4

दिखाएँ कि फलन $f(z) = |z|^2$ हर जगह सतत है लेकिन मूल बिंदु को छोड़कर कहीं भी अवकलनीय नहीं है।

- (b) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function and $z = re^{i\theta}$ where u, v, r, θ are real then the C-R equations are : 4

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

यदि $f(z) = u + iv$ एक वैश्लेषिक फलन है और $z = re^{i\theta}$ जहाँ u, v, r, θ वास्तविक हैं तो C-R समीकरण हैं :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

6. (a) Construct the analytic function of which real part is : 4

$$u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

वैश्लेषिक फलन का निर्माण करें जिसका वास्तविक भाग है :

$$u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

- (b) If $u - v = \frac{e^y - \cos x \cdot \sin x}{\cos hy \cdot \cos x}$ and $f(z) = u + iv$ is an analytic function of z , then find $f(z)$ in terms of z such that : 4

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$$

यदि z का $u - v = \frac{e^y - \cos x + \sin x}{\cos hy - \cos x}$ और $f(z) = u + iv$

एक विश्लेषिक फलन है, तो z के संदर्भ में $f(z)$ ज्ञात करें, जैसा कि :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$$

SECTION - IV

खण्ड - IV

7. (a) Find the image of the infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$. Show the region graphically. <https://www.mdustudy.com> 4

रूपांतरण $w = \frac{1}{z}$ के तहत अनंत पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का प्रतिरूप ज्ञात करें। क्षेत्र को ग्राफिक रूप से दिखाएँ।

- (b) Prove that every Mobius transformation maps circles or straight lines into circles or straight lines. 4

सिद्ध करें कि प्रत्येक मोबियस रूपांतरण सर्कल या सीधी रेखाओं को सर्कल या सीधी रेखाओं में मैप करता है।

8. (a) Find the image of $|z| < 1$ in the z -plane under the transformation $w(z+i)^2 = 1$. 4

रूपांतरण $w(z+i)^2 = 1$ के तहत z -समतल में $|z| < 1$ का प्रतिरूप ज्ञात करें।

- (b) Find the image of the circle $|z - 2| = 2$ under the Mobius transformation $w = \frac{z}{z+1}$

मोबियस रूपांतरण $w = \frac{z}{z+1}$ के तहत सर्कल $|z - 2| = 2$ का प्रतिरूप ज्ञात करें।

SECTION - V

खण्ड - V

9. (a) If $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \tan^{-1} \frac{y}{x}$, show that : 2

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

यदि $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \tan^{-1} \frac{y}{x}$, दिखाएँ कि :

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- (b) Prove symmetry of Beta Function. 1

बीटा फलन की समरूपता सिद्ध करें।

(c) Find Fourier coefficient a_0 for $f(x) = |x|$,
 $-\pi < x < \pi$. 1

$f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ के लिए फूरियर गुणांक a_0 ज्ञात कीजिए।

(d) Determine stereographic projection of $z = 1 - i$ on
the sphere of radius $\frac{1}{2}$ and centre $(0, 0, \frac{1}{2})$. 2

त्रिज्या $\frac{1}{2}$ और केंद्र $(0, 0, \frac{1}{2})$ के स्फियर पर $z = 1 - i$ के
स्टीरियोग्राफिक प्रक्षेपण का निर्धारण करें।

(e) For what values of z , the function $z = \sin hu + \cos v$
 $+ i \cos hu \sin v$ ceases to be analytic? 1

z के किस मान के लिए फलन $z = \sin hu + \cos v +$
 $i \cos hu \sin v$ विश्लेषिक नहीं रहेगा ?

(f) Define Mobius transformation. 1

मोबियस रूपांतरण को परिभाषित करें।