Roll No. .....

94107

B. Sc. Mathematics 6th Sem. Examination – May, 2023

LINEAR ALGEBRA

Paper : 12BSM-362

Time : Three hours] ***[Maximum Marks : 40***

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt ***five*** questions in all, selecting ***one*** question ***from each*** Section. Question No. 9 (Section-V) is ***compulsory***..

प्रत्येक खण्ड से *एक* प्रश्न का चयन करते हुए, कुल *पाँच* प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) *अनिवार्य* है।

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) Let R be the field of real numbers. Check whether $w = \{(x, y, z) : x, y, z$ are rational numbers$\}$ is subspace of $V_3(R)$ or not.

मान लीजिए कि R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है, जाँच कीजिए कि $w = \{(x, y, z) : x, y, z$ परिमेय संख्याएँ हैं$\}$ $V_3(R)$ की उपसमष्टि है या नहीं।

(b) If $S = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ is a basis of $V(F)$, then every element of V can be uniquely expressed as a linear combination of $v_1, v_2, ...v_n$ and conversely.

यदि $V(F)$ का आधार $S = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ है, तो V के प्रत्येक तत्व को विशिष्ट रूप से एक रैखिक संयोजन के रूप में $v_1, v_2, ...v_n$ और इसके विपरीत व्यक्त किया जा सकता है।

2. (a) Extend the set of vectors (0, 1, 2), (2, –1, 4) to form a basis of R^3.

R^3 के आधार बनाने के लिए वेक्टर (0, 1, 2), (2, – 1, 4) के सेट का विस्तार करें।

(b) If w is a subspace of a vector space $V(F)$ and $u, u' \in V$, then $w + u = w + u'$ iff $u - u' \in w$.

यदि w एक सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है और $u, u' \in V$, तो $w + u = w + u'$ यदि और केवल यदि $u - u' \in w$.

SECTION – II

खण्ड – II

3. (a) Show that transformation $T : R^2 \to R^3$ defined by $T(x, y) = (x, x - y, x + y)$ is a linear transformation and is one-to-one but not onto.

दिखाएँ कि $T(x, y) = (x, x - y, x + y)$ द्वारा परिभाषित परिवर्तन $T : R^2 \to R^3$ एक रैखिक रूपांतरण है और एकैकी है लेकिन आच्छादक नहीं है।

https://www.mdupapers.com

(b) Find a linear transformation, which maps (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) in R^3 to (2, 1), (2, 1), (2, 1) in R^2.

एक रैखिक परिवर्तन ज्ञात करें, जो R^3 में (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) से R^2 में (2, 1), (2, 1), (2, 1) प्रतिचित्रित करता है।

4. (a) Let $T : U \to V$ be a linear transformation. Then :

$$U/\ker T \cong T(U)$$

माना $T : U \to V$ एक रैखिक परिवर्तन हो। तब :

$$U/\ker T \cong T(U)$$

(b) Find a linear transformation $T : R^3 \to R^3$ whose range is spanned by the vectors (1, 0, −1) and (1, 2, 2).

एक रैखिक परिवर्तन $T : R^3 \to R^3$ ज्ञात करें जिसकी सीमा वेक्टर (1, 0, −1) और (1, 2, 2) द्वारा फैली हुई है।

SECTION – III

खण्ड – III

5. (a) Let $T_1 : U \to V$ and $T_2 : V \to W$ be two linear transformation. Then :

(i) if T_2T_1 is one-one, then T_1 is one-one

(ii) if T_2T_1 is onto, then T_2 is onto

माना $T_1 : U \to V$ और $T_2 : V \to W$ दो रैखिक परिवर्तन हो। तब :

(i) यदि T_2T_1 एक-एक है, तो T_1 एक-एक है

(ii) यदि T_2T_1 आच्छादक है, तो T_2 आच्छादक है

(b) If $T : R^3 \to R^3$ be a linear operator defined by $T(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$, show that T is invertible and find T^{-1}.

यदि $T : R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$ द्वारा परिभाषित एक रैखिक ऑपरेटर हो, तो दिखाएँ कि T उलटा है और T^{-1} ज्ञात करें।

6. (a) Let T be a linear operator on R^2 defined by $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$. Find the matrix of T w. r. t. to the basis $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$. Also verify that :

$$[T, B]\,[U, B] = [T(U), B]$$

माना T, $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ द्वारा परिभाषित R^2 पर एक रैखिक ऑपरेटर है। आधार $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए। यह भी सत्यापित करें कि :

$$[T, B]\,[U, B] = [T(U), B]$$

(b) Find the coordinates of vector (1, 1, 1) relative to basis (1, 1, 2), (2, 2, 1), (1, 2, 2).

आधार (1, 1, 2), (2, 2, 1), (1, 2, 2) के सापेक्ष वेक्टर (1, 1, 1) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

https://www.mdupapers.com

SECTION – IV

खण्ड – IV

7. (a) Let V be an inner product space. Then $|<u, v>| \leq \|u\| . \|v\|$ for all $u, v \in V$.

माना V एक आंतरिक उत्पाद स्पेस है। फिर $|<u, v>| \leq \|u\| . \|v\|$ for all $u, v \in V$

(b) Every finite dimensional vector space is an inner product space.

प्रत्येक परिमित आयामी वेक्टर स्पेस एक आंतरिक उत्पाद स्पेस है।

8. (a) Let T be a linear operator on a unitary space $V(C)$. Prove that : https://www.mdustudy.com

$$T = 0 \text{ iff } <T(\alpha), \alpha> = 0 \text{ for all } \alpha \in V$$

माना T एक यूनिटरी स्पेस $V(C)$ पर एक रैखिक ऑपरेटर है। सिद्ध करें कि :

$$T = 0 \text{ iff } <T(\alpha), \alpha> = 0 \text{ for all } \alpha \in V$$

(b) Let S and T be linear operators on a finite dimensional inner product space $V(F)$. Then :

(i) $(T + S)^* = T^* + S^*$

(ii) $(TS)^* = S^*T^*$

माना S और T एक परिमित आयामी आंतरिक उत्पाद स्पेस $V(F)$ पर रैखिक ऑपरेटर है। तब :

(i) $(T + S)^* = T^* + S^*$

(ii) $(TS)^* = S^*T^*$

SECTION – V

खण्ड – V

9. (a) Prove that R is not a vector space over C.

सिद्ध कीजिए कि R, C पर सदिश समष्टि नहीं है।

(b) Examine the linear independence of the following set of vectors : $\{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 2, 3)\}$ in R^3.

R^3 में वेक्टर के निम्नलिखित सेट $\{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 2, 3)\}$ की रैखिक स्वतंत्रता की जांच करें।

(c) Determine whether the following mapping is linear transformation or not. $T : R^3 \to R^2$ defined by $T(x, y, z) = (x + 1, y + z)$.

निर्धारित करें कि निम्नलिखित मानचित्रण रैखिक परिवर्तन है या नहीं। $T(x, y, z) = (x + 1, y + z)$ द्वारा परिभाषित $T : R^3 \to R^2$।

(d) Let $T : U \to V$ be a homomorphism, then ker T is a subspace of U.

मान लीजिए $T : U \to V$ एक समाकारिता है, तो ker T, U की एक उपसमष्टि है।

(e) Find the eigen values of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ के आइगेन मूल्यों का पता लगाएँ।

https://www.mdupapers.com

(f) Find the norm of the vector $u = (2, -3, 6)$ and normalize this vector.

वेक्टर $u = (2, 3, 6)$ का मानक ज्ञात करें और इस वेक्टर को सामान्य करें।

https://www.mdustudy.com
Whatsapp @ 9300930012
Send your old paper & get 10/-
अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,
Paytm or Google Pay से

https://www.mdupapers.com