94107

B.Sc. 6th Semester (Pass Course) Examination,

July–2022

MATHEMATICS

Paper–12 BSM-362

Linear Algebra

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each section. **Question No. 9 of Section–V is compulsory.***

नोट : *प्रत्येक खण्ड से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। **खण्ड–V का प्रश्न सं० 9 अनिवार्य है।***

Section–I

खण्ड–I

1. ~~(a)~~ Prove that the union of two subspaces is a subspace if and only if one is contained in the other. 4

(b) Extend the set of vectors (1, 2, 3), (2, 1, 0) to form a basis of R^3. 3

(क) सिद्ध कीजिए कि दो उप समष्टियों का संघ एक उपसमष्टि है यदि तथा केवल यदि एक, दूसरे में निविष्ट है।

(ख) R^3 के एक आधार की विरचना हेतु सदिशों (1, 2, 3), (2, 1, 0) के समुच्चय का विस्तार कीजिए।

2. (a) If W_1, W_2 are two sub-spaces of a finite dimension vector space V (F), then

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2),$$

prove it. 4

(b) If W is a subspace of $V = V_2(R)$ generated by (1, 2), find V / W and its basis. 3

(क) यदि W_1, W_2 एक परिमित आयाम सदिश समष्टि V (F) की दो उप समष्टियां हों, तब

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2),$$

इसे सिद्ध कीजिए।

(ख) यदि W, (1, 2) द्वारा जनित $V = V_2(R)$ की एक उपसमष्टि है, तो V / W तथा इसका आधार ज्ञात कीजिए।

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Let $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (4, 1, 1), u_3 = (1, -1, 2)$ be a basis of R^3. Let $T : R^3 \to R^2$ be the

https://www.mdupapers.com

linear transformation such that $T(u_1) = (1, 0)$, $T(u_2) = (0, 1)$, $T(u_3) = (1, 1)$. Find T. 4

(b) If $T : U(F) \to V(F)$ is a linear transformation, then prove that :-

$$\text{Rank}(T) + \text{Nullity}(T) = \dim U.$$ 3

(क) मान लें $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (4, 1, 1)$, $u_3 = (1, -1, 2)$ का एक R^3 आधार हो। मान लें $T : R^3 \to R^2$ रैखिक रूपांतरण हो इस प्रकार से कि $T(u_1) = (1, 0)$, $T(u_2) = (0, 1)$, $T(u_3) = (1, 1)$; तो T ज्ञात कीजिए।

(ख) यदि $T : U(F) \to V(F)$ एक रैखिक रूपांतरण है, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{Rank}(T) + \text{Nullity}(T) = \dim U$$

4. (a) Prove that the dual space V^* of a n-dimensional vector space V (F) is also n-dimensional. 4

(b) Find the dual basis of the basis

$B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$ of $V_3(R)$. 3

(क) सिद्ध कीजिए कि n-आयामी सदिश समष्टि V (F) की द्वैत समष्टि V^* भी n-आयामी है।

(ख) $V_3(R)$ के आधार

$$B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$$

का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Let $T : R^3 \to R^3$ be a linear operator defined by $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Show that T is invertible and find T^{-1}. 4

(b) Let A be $n \times n$ matrix over a field F. Then prove that $\lambda \in F$ is eigen value of A iff $(A - \lambda I)$ is singular. 3

(क) मान लें $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ द्वारा परिभाषित एक रैखिक संकारक $T : R^3 \to R^3$ हो। दिखाइये कि T व्युत्क्रमणीय है तथा T^{-1} ज्ञात कीजिए।

(ख) मान लें A एक क्षेत्र F के ऊपर $n \times n$ आव्यूह हो। तब सिद्ध कीजिए कि $\lambda \in F$ एक आइजन मान है A का, यदि तथा केवल यदि $(A - \lambda I)$ एकल है।

https://www.mdupapers.com

6. (a) Find the matrix representing the transformation $T : R^2 \to R^3$ defined by $T(x, y) = (x + y, 2x - y, 7y)$ relative to standard ordered basis of R^2 and R^3. 4

(b) Let $T : R^3(R) \to R^3(R)$ be a linear transformation defined by $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, 2z)$. Find the characteristic and minimal polynomial for T. 3

(क) R^2 तथा R^3 के प्रमाप क्रमित आधार के सापेक्ष $T(x, y) = (x + y, 2x - y, 7y)$ द्वारा परिभाषित रूपांतरण $T : R^2 \to R^3$ को निरूपित करने वाला आव्यूह ज्ञात कीजिए।

(ख) मान लें $T : R^3(R) \to R^3(R)$ एक रैखिक रूपांतरण हो जो $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, 2z)$ द्वारा परिभाषित है। T के लिए लाक्षणिक तथा निम्नतम वहुपद ज्ञात कीजिए।

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Prove that every finite dimensional vector space is an inner product space. 4

(b) Using Gram-Schmidt process, find an orthonormal basis of the subspace W of $V_3(C)$ spanned by $u_1 = (1, 0, i)$, $u_2 = (2, 1, 1 + i)$. 3

(क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित आयामी सदिश समष्टि एक आंतरिक उत्पाद समष्टि है।

(ख) ग्राम-श्मिट प्रक्रिया का उपयोग करते हुए, $u_1 = (1, 0, i)$, $u_2 = (2, 1, 1 + i)$ द्वारा फैलाये गये $V_3(C)$ की उप समष्टि W का एक प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए।

8. (a) If T and S are normal operators on an inner product space V (F), show that TS and T + S are normal operators if either of the operators commute with the adjoint of other. https://www.mdustudy.com

(b) Let T be a linear operator on an inner product space V (F). If $T^2(u) = 0$ and T is self-adjoint or skew symmetric, then show that $T(u) = 0$. 3

(क) यदि T तथा S एक आंतरिक उत्पाद समष्टि V (F) पर प्रसामान्य संकारक हैं, तब दिखाइये कि TS व T + S प्रसामान्य संकारक हैं यदि संकारकों में से कोई भी अन्य के पार्श्ववर्ती के साथ विनिमय करता है।

https://www.mdupapers.com

(ख) मान लें T एक आंतरिक उत्पाद समष्टि V (F) पर एक रैखिक संकारक हो। यदि $T^2(u) = 0$ तथा T स्व-पार्श्ववर्ती अथवा विषम सममित है, तब दिखाइये कि $T(u) = 0$

Section–V

खण्ड–V

9. (a) Show that any plane passing through the origin is a subspace of R^3.

(b) Show that the set $S = \{1, i\}$ which is a subset of vector space C over the field of real numbers generate C over R.

(c) Show that the linear transformation $T : R^2 \to R^2$ defined by $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ is a non-singular transformation.

(d) Find the co-ordinates of vector (1, 1, 1) relative to the basis (1, 1, 2), (2, 2, 1), (1, 2, 2).

(e) Prove that similar matrices have same characteristic polynomial.

(f) Define orthogonal complement of a orthogonal complement of a vector space. [2 each]

(क) दिखाइये कि मूल बिन्दु से होकर गुजरने वाला कोई तल R^3 की एक उप समष्टि है।

(ख) दिखाइये कि समुच्चय $S = \{1, i\}$ जो वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र के ऊपर सदिश समष्टि C की एक उपसमष्टि है, R के ऊपर C को जनित करती है।

(ग) दिखाइये कि रैखिक रूपांतरण $T : R^2 \to R^3$ जो $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ द्वारा परिभाषित एक गैर एकल रूपांतरण है।

(घ) आधार (1, 1, 2), (2, 2, 1), (1, 2, 2) के सापेक्ष सदिश (1, 1, 1) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ङ) सिद्ध कीजिए कि समान आव्यूहों के समान लाक्षणिक बहुपद होते हैं।

(च) एक सदिश समष्टि के लंबकोणिक पूरक के लंबकोणिक पूरक को परिभाषित कीजिए।

https://www.mdustudy.com
Whatsapp @ 9300930012
Send your old paper & get 10/-
अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,
Paytm or Google Pay से

https://www.mdupapers.com