B.Sc. 5th Semester (Pass) Examination,

November–2023

MATHEMATICS

Paper–12BSM-351

Real Analysis

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

*Note : Attempt any **five** questions in all by selecting **one** question from each section. **Question No. 9 is compulsory.***

*नोट : प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। **प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है।***

Section–I

खण्ड–I

1. (a) Show that the function $f(x) = x,\ x \in [0,1]$ is integrable and evaluate $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2$.

   (b) Show that every monotonic function on a closed interval is integrable on that interval.

   (क) दर्शाइये कि फलन $f(x) = x,\ x \in [0,1]$ समाकलनीय है तथा $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2$ का मूल्यांकन कीजिए।

   (ख) दर्शाइये कि एक बंद अंतराल पर प्रत्येक एकदिष्ट फलन उस अंतराल पर समाकलनीय है।

2. (a) By definition Prove that $\int_0^a \cos x\,dx = \sin a$. where a is fixed number.

   (b) If f is monotonic and f, f′ and g are continuous on [a, b], then show $\exists C \in [a, b]$ such that

$$\int_a^b f\,g\,dx = f(a)\int_a^c g\,dx + f(b)\int_c^b g\,dx$$

   (क) परिभाषा द्वारा सिद्ध कीजिए कि $\int_0^a \cos x\,dx = \sin a$. जहां a स्थिर संख्या है।

   (ख) यदि f एकदिष्ट है तथा [a, b] पर f, f′ और g सतत हैं, तब दर्शाइये $\exists C \in [a, b]$ इस प्रकार से कि

$$\int_a^b f\,g\,dx = f(a)\int_a^c g\,dx + f(b)\int_c^b g\,dx$$

https://www.mdupapers.com

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Test the convergence of integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

(b) State and prove Dirichlet's Test for convergence.

(क) समाकल $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

(ख) अभिसारिता के लिए डिरिक्लेट के परीक्षण को बताइये तथा सिद्ध कीजिए।

4. (a) Evaluate $\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2} dx$; $a > 0$.

(b) Show that $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx$ converges to $\frac{1}{2} \log \frac{a+b}{a-b}$ where $a > b > 0$.

(क) मूल्यांकन कीजिए : $\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2} dx$; $a > 0$.

(ख) दर्शाइये कि $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx$, $\frac{1}{2} \log \frac{a+b}{a-b}$ की ओर अभिसारित होता है जहाँ $a > b > 0$.

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Let (Y, d) be metric space, defined $d^* : Y \times Y \rightarrow R$ as $d^*(x, y) = \min. \{2, d(x, y)\}$. Show that d^* is a metric on Y.

(b) Prove that any metric space (X, d) bounded or not, can be converted into a bounded metric space (X, d*), where d* is defined as

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

(क) मान लें (Y, d) दूरीक समष्टि हो, जहाँ $d^* : Y \times Y \rightarrow R$, $d^*(x, y) = \min. \{2, d(x, y)\}$ के रूप में परिभाषित है। दर्शाइये कि d^*, Y पर एक दूरीक है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि कोई भी दूरीक समष्टि (X, d) परिबद्ध हो या नहीं, उसे एक परिबद्ध दूरीक समष्टि में परिवर्तित किया जा सकता है, जहाँ d^* को

$$d^*(X, d^*) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

https://www.mdupapers.com

6. (a) Let (X, d) be a metric space and (Y, d*) be a subspace there of. A subset B of Y is d* open iff. $\exists$ a d-open subset G of X such that $B = G \cap Y$.

(b) State Cantor's intersection theorem.

(क) मान लें (X, d) एक दूरीक समष्टि हो तथा (Y, d*) उसकी एक उपसमष्टि हो। Y का एक उपसमुच्चय B, d* खुला है यदि तथा केवल यदि X का $\exists$ एक d-खुला उपसमुच्चय इस प्रकार है कि $B = G \cap Y$.

(ख) कैंटर के प्रतिच्छेदन प्रमेय को बताइये।

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Let (X, d) and (Y, d*) be metric spaces and f be a function of X into Y. Then f is continuous iff $f^{-1}(G)$ is open in X whenever G is open in Y.

(b) A metric space (X, d) is compact iff every collection of closed subsets of X with finite intersection property has a non empty intersection.

(क) मान लें (X, d) तथा (Y, d*) दूरीक समष्टियां हों तथा f, Y में X का एक फलन हो। तब f सतत है यदि तथा केवल यदि f(G), X में खुला है जब भी Y में G खुला है।

(ख) एक दूरीक समष्टि (X, d) संहत होता है यदि तथा केवल यदि परिमित प्रतिच्छेदन गुण वाले X के बंद उपसमुच्चयों के प्रत्येक संग्रह में एक गैर रिक्त प्रतिच्छेदन होता है।

8. (a) Prove that continuous image of a compact metric space is compact.

(b) If E is connected subset of a metric space (X,d) such that $E \subset A \cup B$, where A and B are separated sets in X then prove either $E \subset A$ or $E \subset B$.

(क) सिद्ध कीजिए कि एक संहत दूरीक समष्टि की सतत छवि संहत है।

(ख) यदि E एक दूरीक समष्टि (X,d) का संयोजित उपसमुच्चय है इस प्रकार से कि $E \subset A \cup B$, जहां A तथा B, X में पृथक्कृत समुच्चय हैं तब सिद्ध कीजिए या तो $E \subset A$ अथवा $E \subset B$ है।

https://www.mdupapers.com

Section–V

खण्ड–V

9\. (a) A function f is defined on [1, 3] as

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{|x|}{x} & \text{if } 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{if } 2 < x \le 3 \end{cases};$$ Is f integrable on [1, 3] ?

(b) Compute $\int_0^3 [x]\,dx$, where [x] is greatest integer function.

(c) Examine the convergence of integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$.

(d) Define derived set and closure of a set.

(e) Define contraction principle in a metric space.

(f) Define sequentially compact metric space.

(क) एक फलन f ; $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{|x|}{x} & \text{यदि } 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{यदि } 2 < x \le 3 \end{cases}$ के रूप में [1, 3] पर परिभाषित है। क्या f, [1, 3] पर समाकलनीय है ?

(ख) $\int_0^3 [x]\,dx$ की गणना कीजिए, जहाँ [x] वृहद्‌तम पूर्णांक फलन है।

(ग) समाकल $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ की अभिसारिता की जांच कीजिए।

(घ) व्युत्पन्न समुच्चय तथा एक समुच्चय के समापन को परिभाषित कीजिए।

(ङ) किसी दूरीक समष्टि में संकुचन सिद्धान्त को परिभाषित कीजिए।

(च) क्रमिक रूप से संहत दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिए।

https://www.mdustudy.com
Whatsapp @ 9300930012
Send your old paper & get 10/-
अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,
Paytm or Google Pay से

https://www.mdupapers.com