

B.Sc. 5th Semester (Pass) Examination,

November-2023

MATHEMATICS

Paper-12BSM352

Groups and Rings

Time allowed : 3 hours] [Maximum marks : 40

Note : Attempt any five questions in all, selecting one question from each section. Question No. 9 (Section-V) is compulsory.

नोट : प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है।

Section-I

खण्ड-I

1. (a) Let Q^+ be the set of all positive rational numbers and $*$ be the binary operation defined by $a * b = \frac{ab}{3}$. Prove that Q^+ is a group w.r.t. $*$.

94007-P-7-Q-9 (23)

[P.T.O.]

(b) Order of cyclic group is the order of its generator.

(क) मान लें Q^+ सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय हो तथा $*$, $a * b = \frac{ab}{3}$ द्वारा परिभाषित द्विपद संक्रिया हो। सिद्ध कीजिए कि Q^+ , $*$ के संदर्भ में एक समूह है।

(ख) चक्रीय समूह का क्रम इसके जनक का क्रम है।

2. (a) If H is a subgroup of G , then G is equal to the union of all right cosets of H in G .

(b) Let H be a subgroup of G and N be a normal subgroup of G . Then $H \cap N$ is a normal subgroup of H .

(क) यदि H, G का एक उपसमूह हो तब G, G में H के सभी दांये सह समुच्चयों के संघ के लिए बराबर है।

(ख) मान लें H, G का एक उप समूह हो तथा N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह हो। तब $H \cap N, H$ का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

(3)

94007

Section-II

खण्ड-II

3. (a) Every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G .

(b) Let G be an infinite cyclic group. Show that order of $\text{Aut}(G)$ is 2.

(क) एक समूह G की प्रत्येक समाकृतिक छवि G के कुछ लब्धि समूह के लिए समरूपी है।

(ख) मान लें G एक अपरिमित चक्रीय समूह हो। दर्शाइये कि $\text{Aut}(G)$ का क्रम 2 है।

4. (a) Write all elements of symmetric group S_3 as product of disjoint cycles.

(b) Let $S = \{a, b, c\}$. Write down even and odd permutations.

(क) सममित समूह S_3 के सभी तत्वों को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखें।

94007

[P.T.O.]

(4)

94007

(ख) मान लें $S = \{a, b, c\}$; सम तथा विषम क्रमचर्यों को लिखिए।

Section-III

खण्ड-III

5. (a) Every finite non-zero integral domain is a field.

(b) If S_1 and S_2 be two ideals of a ring R , then $S_1 + S_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.

(क) प्रत्येक परिमित गैर-शून्य समाकल प्रांत एक क्षेत्र है।

(ख) यदि S_1 तथा S_2 एक वलय R के दो आदर्श हों, तब $S_1 + S_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.

6. (a) An ideal S of a commutative ring R with unity is maximal iff R/S is a field.

(b) Let $R = \{a + \sqrt{5}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$, where R is a ring under addition and multiplication of real numbers. Define $f: R \rightarrow R$ by $f(a + \sqrt{5}b) = a - \sqrt{5}b$. Show that f is a homomorphism of R onto R and its kernel consists of 0 only.

94007

(5)

94007

- (क) ऐक्य के साथ क्रम विनिमेय वलय R का एक आदर्श S अधिकतम है यदि तथा केवल यदि R/S एक क्षेत्र है।
- (ख) मान लें $R = \{a + \sqrt{5}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$, जहाँ R वास्तविक संख्याओं के योग तथा गुणन के अंतर्गत एक वलय है। $f(a + \sqrt{5}b) = a - \sqrt{5}b$ द्वारा $f: R \rightarrow R$ को परिभाषित कीजिए। दर्शाइये कि f , R पर R की समाकृतिकता है तथा इसका बीजतत्व केवल 0 है।

Section-IV

खण्ड-IV

7. (a) Show that an element is a principal ideal domain is a prime element iff it is irreducible.
- (b) Show that units of $\mathbb{Z}[i]$ are $-1, 1, -i, i$.
- (क) दर्शाइये कि एक प्रमुख आदर्श प्रांत में एक तत्व मुख्य तत्व है यदि तथा केवल यदि यह असमानेय है।
- (ख) दर्शाइये कि $\mathbb{Z}[i]$ की इकाइयां $-1, 1, -i, i$ हैं।

94007

[P.T.O.]

94007

<https://www.mdupapers.com><https://www>

(6)

94007

8. (a) Prove that every field $\langle F, +, \cdot \rangle$ is always a unique factorisation domain.
- (b) Show that the polynomial $x^4 - 1$ is irreducible over \mathbb{Q} .
- (क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र $\langle F, +, \cdot \rangle$ सदैव एक अद्वितीय गुणनखण्ड प्रांत होता है।
- (ख) दर्शाइये कि बहुपद $x^4 + 1$, \mathbb{Q} पर असमानेय है।

Section-V

खण्ड-V

9. (a) Let $G = \{1, 2, 3, 4\}$ be the group w.r.t. multiplication modulo 5. Find the order of each element. <https://www.mdustudy.com>
- (b) Define cyclic group.
- (c) State third theorem of isomorphism.
- (d) Find the inverse of the permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) Define Quotient ring.

(f) Define principal ideal domain.

(क) मान लें $G = \{1, 2, 3, 4\}$ गुणन मॉड्यूलो 5 के संदर्भ में समूह हो। प्रत्येक तत्व का क्रम ज्ञात कीजिए।

(ख) चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।

(ग) समरूपता के तृतीय प्रमेय को बताइये।

(घ) क्रमचय

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(ङ) लब्धि वलय को परिभाषित कीजिए।

(च) प्रमुख आदर्श प्रांत को परिभाषित कीजिए।