B.Sc. (Pass) 4th Semester, (New Scheme)

(Fresh and Re-Appear)

Examination, May-2023

MATHEMATICS

Paper - BM-242 P-II

Special Functions and Integral Transforms

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

Note: Attempt five question in all, selecting ***one*** *question form each unit.* ***Question No. 9 is compulsory.***

नोट: प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल ***पाँच*** *प्रश्न कीजिए।*

Section - I

खण्ड - I

1. (a) Solve $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2-1)y = 0$ in series.

   शृंखला में $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2-1)y = 0$ को हल कीजिए।

   (b) Prove that $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x.$

   सिद्ध कीजिए कि $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$

2. (a) Find the power series soluton of the differential equation.

   $$(x^2 - 4x + 5)\frac{d^2y}{dx^2} + (x-2)\frac{dy}{dx} - (x-2)y = 0$$ in powers of $(x-2)$,

   अवकल समीकरण

   $$(x^2 - 4x + 5)\frac{d^2y}{dx^2} + (x-2)\frac{dy}{dx} - (x-2)y = 0$$

   को $(x-2)$ की घातों में घात शृंखला हल ज्ञात कीजिए।

   (b) Prove that $e^{x/2\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$

   सिद्ध कीजिए $e^{x/2\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$

Section - II

खण्ड - II

3. (a) Express $4x^3 - 2x^2 - 3x + 8$ in terms of Legendre's polynomials.

लीजेंड्रे बहुपदों के पदों में $4x^3 - 2x^2 - 3x + 8$ को व्यक्त कीजिए।

(b) Show that $n P_n(x) = x P_n'(x) - P'_{n-1}(x)$.

दर्शाइये कि $n P_n(x) = x P_n'(x) - P'_{n-1}(x)$

4. (a) States and prove generating function for Hermite's polynomial.

हर्मिट के बहुपद के लिए जनक फलन को बताइये तथा सिद्ध कीजिए।

(b) Prove that $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$.

सिद्ध कीजिए कि $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

Section - III

खण्ड - III

5. (a) Evaluate $\int_0^\infty t\, e^{-1} \sin^4 t\, dt$

मूल्यांकन कीजिए $\int_0^\infty t\, e^{-1} \sin^4 t\, dt$

[P.T.O.

(b) Show that $L\left[\sin h\frac{t}{2} \sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}\,s}{2(s^4+s^2+1)}$

दर्शाइये कि $L\left[\sin h\frac{t}{2} \sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}\,s}{2(s^4+s^2+1)}$

6. (a) Evaluate $L^{-1}\left[\frac{s}{[s^2+a^2]^3}\right]$.

मूल्यांकन कीजिए $L^{-1}\left[\frac{s}{[s^2+a^2]^3}\right]$

(b) Solve by transform method :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t}, \text{ where } y(0) = y'(0) = 1$$

रूपांतरण विधि द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t}, \text{ जहाँ } y(0) = y'(0) = 1$$

Section - IV

खण्ड - IV

7. (a) Find the fourier sine transform of $\frac{e^{-ax}}{x}$

$\frac{e^{-ax}}{x}$ का फोरियर ज्या रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(b) Prove Convolutoin Theorem for Fourier transform.

फोरियर रूपांतरण के लिए संवलन प्रमेय को सिद्ध कीजिए।

8. (a) Find the finite fourier sine transform of $\cos ax, (0 < x < \pi)$

$\cos ax, (0 < x < \pi)$ का परिमित फोरियर ज्या रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(b) Solve : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, given that

(i) $u(0, t) = 0$

(ii) $u(x, t) = 0$

(iii) $u(x, 0) = 2u$, where $0 < x < \pi, t > 0$

हल कीजिए : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, दिया गया है कि

(i) $u(0, t) = 0$

(ii) $u(x, t) = 0$

(iii) $u(x, 0) = 2u$, जब $0 < x < \pi, t > 0$

Section - V

खण्ड - V

9. (a) Using Rodrigue formula find $P_3(x)$.

रॉड्रिग्स सूत्र का उपयोग करते हुए $P_3(x)$ ज्ञात कीजिए।

(b) Show that : $J_{-1/2}(x) = J_{1/2}(x) \cot x$

दर्शाइये कि : $J_{-1/2}(x) = J_{1/2}(x) \cot x$

(c) Find Fourier cosine transform of $2e^{-5x}$.

$2e^{-5x}$ का फोरियर कोज्या रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(d) Find Fourier sine and cosine transform.

फोरियर ज्या तथा कोज्या रूपांतरण को परिभाषित कीजिए।

(e) Prove that $\int_{-1}^{1} P_0(x)\,dx = 2$

सिद्ध कीजिए कि $\int_{-1}^{1} P_0(x)\,dx = 2$

(f) Define Laplace transformation.

लाप्लास रूपांतरण को परिभाषित कीजिए।