

B.Sc. (Pass) 4th Semester (New Scheme)
(Fresh and Re-appear) Examination, May-2023

MATHEMATICS
Paper - BM241 P-1
Sequences and Series

Time allowed : 3 hours]

[Maximum marks : 40

Note : Attempt five questions in all by selecting at least one question from each unit. Question no. 9 is compulsory and carry 12 marks. Remaining all questions are of 7 marks each.

नोट: प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्न सं. 9 अनिवार्य है तथा 12 अंकों का है। शेष सभी प्रश्न प्रत्येक 7 अंकों के हैं।

Unit-I

इकाई-I

1. (a) If sets C and D are non-empty bounded subsets of R_1 then prove $C \cup D$ is also bounded and also $\inf. (C \cup D) = \min. \{ \inf. C, \inf. D \}$.

यदि समुच्चय C तथा D ; R के गैर-रिक्त आबद्ध उपसमुच्चय हैं, तब सिद्ध कीजिए कि $C \cup D$ भी आबद्ध है तथा $\inf. (C \cup D) = \min. \{ \inf. C, \inf. D \}$ भी।

- (b) If set S and T are neighbourhoods of a point p, then $S \cap T$ is also a neighbourhoods of point.

यदि समुच्चय S तथा T एक बिंदु p के निकटवर्ती हैं, तब $S \cap T$ भी बिन्दु p का एक निकटवर्ती है।

2. (a) Prove the interior of a set A is the largest open subset of A.

सिद्ध कीजिए एक समुच्चय A का आंतरिक भाग A का सबसे बड़ा खुला उपसमुच्चय है।

- (b) Prove closure of a set is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय का संवरण संवृत समुच्चय होता है।

Unit-II

इकाई-II

3. (a) A sequence $\langle a_n \rangle$ is a null sequence iff $\langle |a_n| \rangle$ is a null sequence.

एक अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ एक शून्य अनुक्रम है यदि तथा केवल यदि $\langle |a_n| \rangle$ एक शून्य अनुक्रम है।

(3)

92206

- (b) Discuss the conveyance of sequence $\langle a_n \rangle$, where

$$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}.$$

अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ की अभिसारिता की विवेचना कीजिए,

$$\text{जहाँ } a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}.$$

4. Discuss the convergence of following series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} [\log(n+1) - \log n]$

निम्नलिखित श्रृंखला की अभिसारिता की विवेचना कीजिए:

(क) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(ख) $\sum_{n=2}^{\infty} [\log(n+1) - \log n]$

(4)

92206

Unit-III

इकाई-III

5. Test the convergence of following series:

(a) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots \infty$

(b) $1 + x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + \frac{(4x)^4}{4} + \dots$

निम्नलिखित श्रृंखलाओं की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए:

(क) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots \infty$

(ख) $1 + x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + \frac{(4x)^4}{4} + \dots$

6. (a) Using integral test, test the behaviour of the series:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}; p > 0$$

समाकलन परीक्षण का उपयोग करते हुए निम्न श्रृंखला के व्यवहार का परीक्षण कीजिए:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}; p > 0$$

(5)

92206

- (b) Using Cauchy's condensation test, discuss the convergence of the series:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

कौची के संघनन परीक्षण का उपयोग करते हुए, शृंखला की अभिसारिता की विवेचना कीजिए:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

Unit-IV

इकाई-IV

7. (a) Show that the series $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, convergence absolutely for all values of x .

दर्शाइये कि शृंखला $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, x के सभी मानों के लिए निरपेक्ष रूप से अभिसारित होता है।

- (b) Test the convergence of the series:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - n}{\log n}$$

शृंखला की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - n}{\log n}$$

92206

(6)

92206

8. (a) Show that the series $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \dots$, is convergent but when parenthesis are removed, it oscillates.

दर्शाइये कि शृंखला $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \dots$, अभिसारी है परन्तु जब कोष्ठक हटा दिये जाते हैं यह दोलन करता है।

- (b) Investigate what rearrangement of the following series will reduce its sum to zero,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

जांच करें कि निम्नलिखित शृंखला की कौन-सी पुनर्व्यवस्था इसके योग को शून्य तक कम कर देगी,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Unit-V

इकाई-V

9. (a) Give an example of set which is bounded below but not above.

समुच्चय का एक उदाहरण दें जो नीचे परिबद्ध है लेकिन ऊपर नहीं।

- ~~(b)~~ Prove that infimum of a set, if exist, is unique.

सिद्ध कीजिए कि एक समुच्चय का न्यूनतम (infimum), यदि मौजूद है, अद्वितीय है।

- (c) Give an example of a sequence which is monotonically increasing.

अनुक्रम का एक उदाहरण दीजिए जो नीरस रूप से वर्धमान है।

- ~~(d)~~ Discuss the convergence of series $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

श्रृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ की अभिसारिता की विवेचना कीजिए।

- (e) State Raabe's and Cauchy's root tests.

राबे तथा कौची के मूल परीक्षणों को बताइये।

- (f) State Pringsheim's Theorem.

प्रिंग्सहेम प्रमेय को बताइये।