

92008

B.Sc. Mathematics 3rd Semester Examination – December, 2024

STATISTICS

Paper : BM-233

Time : Three hours] [Maximum Marks : 40

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Question No. 9 (Section-V) is *compulsory*.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) अनिवार्य है।

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) Three forces P, Q, R acting at a point O are in equilibrium and the angle between P and Q is double the angle between P and R . Show that :

$$R^2 = Q(Q - P)$$

एक बिंदु O पर कार्य करने वाले तीन बल P, Q, R संतुलन में हैं और P और Q के बीच का कोण P और R के बीच के कोण का दोगुना है। दिखाएँ कि :

$$R^2 = Q(Q - P)$$

(b) Three like parallel forces P, Q, R act at the corner of a triangle ABC . Prove that their resultant will pass through the circumcenter of the triangle if $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$.

त्रिभुज ABC के कोने पर तीन समान समांतर बल P, Q, R कार्य करते हैं। सिद्ध करें कि उनका परिणामी त्रिभुज के परिकेंद्र से होकर गुजरेगा यदि $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ ।

2. (a) If any number of co-planer forces acting on a rigid body have a resultant, the algebraic sum of their moments about any point in their plane is equal to the moment of their resultant about that point.

यदि किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करने वाले कितने भी सह-समतलीय बलों का एक परिणामी है, तो उनके तल में किसी भी बिंदु के बारे में उनके आघूर्णों का बीजगणितीय योग उस बिंदु के बारे में उनके परिणामी के आघूर्ण के बराबर होता है।

(b) The moments of a force about points $(0, 0), (10, 0), (0, 5)$ are $184, -46$ and 249 kg.m. Find where the force meets the axis of x and find its components parallel to the co-ordinate axes.

बिंदुओं (0, 0), (10, 0), (0, 5) के बारे में एक बल के आघूर्ण 184, 46 और 249 kg.m है। बल x-अक्ष से काटी मिलता है तथा निर्देशांक अक्षों के समांतर इसके घटकों को ज्ञात कीजिए।

SECTION - II

खण्ड - II

3. (a) A beam whose centre of gravity divides it into two portions a and b is placed inside a smooth sphere. Show that if θ be its inclination to the horizon in the position of equilibrium and 2α be the angle subtended by the beam at the centre of the sphere, then :

$$\tan \theta = \frac{b-a}{b+a} \tan \alpha$$

एक बीम जिसका गुरुत्वाकर्षण केंद्र इसे दो भागों a और b में विभाजित करता है, एक चिकने गोले के अंदर रखा गया है। दिखाएँ कि यदि संतुलन की स्थिति में क्षितिज की ओर इसका झुकाव θ है तथा गोले के केंद्र पर बीम द्वारा बनाया गया कोण 2α है, तो :

$$\tan \theta = \frac{b-a}{b+a} \tan \alpha$$

- (b) A sphere hangs by a string one end of which is fastened to a point on the surface of sphere and the other to a point in a smooth vertical wall. Find the position of equilibrium of the sphere and the tension of the string.

एक गोला एक डोरी से लटका हुआ है जिसका एक सिरा गोले की सतह पर एक बिंदु से तथा दूसरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के एक बिंदु से बंधा हुआ है। गोले की संतुलन स्थिति तथा डोरी का तनाव ज्ञात करें।

4. (a) A weight can be just supported on a rough inclined plane by a force P acting along the plane or by a force Q acting horizontally. Show that the weight is $\frac{PQ}{\sqrt{Q^2 \sec^2 \phi - P^2}}$, where ϕ is the angle of friction.

एक भार को किसी खुरदरे झुकाव वाले तल पर समतल के अनुदिश कार्य करने वाले बल P अथवा क्षैतिज रूप से कार्य करने वाले बल Q द्वारा सहारा दिया जा सकता है। दिखाएँ कि भार $\frac{PQ}{\sqrt{Q^2 \sec^2 \phi - P^2}}$ है, जहाँ ϕ घर्षण कोण है।

- (b) Find the centre of gravity of a right circular solid cone.

एक लम्ब वृत्तीय ठोस शंकु का गुरुत्वाकर्षण केंद्र ज्ञात करें।

SECTION - III

खण्ड - III

5. (a) Five weightless rods of equal length are jointed together so as to form a rhombus $ABCD$ with one diagonal BD . If a weight W be attached to C and the system be suspended from A , show that there is a thrust in BD to $\frac{W}{\sqrt{3}}$.

समान लंबाई की पाँच भारहीन छड़ों को एक साथ जोड़कर एक समचतुर्भुज ABCD बनाया गया है जिसका एक विकर्ण BD है। यदि C पर एक भार W लगाया जाए और निकाय को A से निलंबित किया जाए, तो दिखाएँ कि BD में $\frac{W}{\sqrt{3}}$ एक थ्रस्ट है।

- (b) A heavy elastic string, whose natural length is $2\pi a$ is placed round a smooth cone whose axis is vertical and whose semi-vertical angle is α . If W be the weight and λ the modulus of elasticity of the string. Prove that it will be in equilibrium when in the form of a circle whose radius is $a \left[1 + \frac{W \cot \alpha}{2\pi\lambda} \right]$.

एक भारी लोचदार डोरी, जिसकी प्राकृतिक लंबाई $2\pi a$ है, को एक चिकने शंकु के चारों ओर रखा जाता है जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है और जिसका अर्ध-ऊर्ध्वाधर कोण a है। यदि W भार है और λ डोरी का लोच का मापांक है। सिद्ध कीजिए कि यह उस समय संतुलन में होगी जब यह एक वृत्त के रूप में होगी जिसकी त्रिज्या $a \left[1 + \frac{W \cot \alpha}{2\pi\lambda} \right]$ है।

6. (a) Equal forces act along two perpendicular diagonals of opposite faces of a cube of side 'a'. Show that they are equivalent to a single force R acting along a line through the centre of the cube and a couple $aR/2$ with some line for axis.

भुजा 'a' वाले घन के विपरीत फलकों के दो लंबवत विकर्णों के अनुदिश समान बल कार्य करते हैं। दिखाएँ कि वे घन के केंद्र से होकर जाने वाली एक रेखा और अक्ष के लिए किसी रेखा के साथ $aR/2$ युग्म के अनुदिश कार्य करने वाले एकल बल R के समतुल्य हैं।

- (b) A force parallel to the axis of z acts at the point $(a, 0, 0)$ and an equal force perpendicular to the axis of z acts at the point $(-a, 0, 0)$. Show that the central axis of the system lies on the surface $z^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - ax)^2$.

z -अक्ष के समांतर एक बल बिंदु $(a, 0, 0)$ पर कार्य करता है और z अक्ष के लंबवत एक समान बल बिंदु $(-a, 0, 0)$ पर कार्य करता है। दिखाएँ कि प्रणाली का केंद्रीय अक्ष सतह $z^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - ax)^2$ पर स्थित है।

SECTION - IV

खण्ड - IV

7. (a) Show that a given system of forces can be replaced by two forces, equivalent to the given system, in an infinite number of ways and that the tetrahedron formed by the two forces is of constant volume. <https://www.mdustudy.com>

दिखाएँ कि बलों की एक दी गई प्रणाली को अनंत तरीकों से दी गई प्रणाली के बराबर दो बलों द्वारा प्रतिस्थापित किया जा सकता है और दो बलों द्वारा गठित टेट्राहेड्रोन स्थिर आयतन का होता है।

- (b) Show that the wrench $(X, Y, Z; L, M, N)$ is equivalent to two forces, one acting along the line $x = y = z$. Show that other acts along the line given by $Lx + My + Nz = 0$, $x(Y - Z) + y(Z - X) + z(X - Y) = L + M + N$ and find the magnitude of the two forces.

दिखाएँ कि रिच (X, Y, Z; L, M, N) दो बलों के बराबर है, जिनमें से एक $x = y = z$ रेखा के साथ कार्य करता है। दिखाएँ कि अन्य $Lx + My + Nz = 0$, $x(Y - Z) + y(Z - X) + z(X - Y) = L + M + N$ द्वारा दी गई रेखा के साथ कार्य करते हैं और दोनों बलों का परिमाण ज्ञात करें।

8. (a) A hemisphere rests in equilibrium on a sphere of equal radius. Show that the equilibrium is stable when the flat surface of hemisphere rests on the sphere and the equilibrium is unstable when the curved surface rests on the sphere.

एक गोलार्द्ध समान त्रिज्या वाले गोले पर संतुलन में टिका हुआ है। दिखाएँ कि जब गोलार्द्ध का सपाट पृष्ठ गोले पर टिका होता है तो संतुलन स्थिर होता है और जब वक्र पृष्ठ गोले पर टिका होता है तो संतुलन अस्थिर होता है।

- (b) A uniform solid ellipsoid of revolution of semi-axes a, b (the axis of revolution being $2a$) is cut in two by a plane through the centre perpendicular to the axis of revolution. If either half will balance in stable equilibrium with its vertex on a horizontal plane, prove that :

$$\frac{b^2}{a^2} > \frac{5}{8}$$

अर्ध-अक्षों a, b (परिक्रमण अक्ष $2a$ है) के परिक्रमण के एक समान ठोस दीर्घवृत्त को परिक्रमण अक्ष के लंबवत केंद्र से होकर जाने वाले एक समतल द्वारा दो भागों में काटा जाता है। यदि कोई भी आधा भाग क्षैतिज तल पर अपने शीर्ष के साथ स्थिर संतुलन में संतुलित रहेगा, तो सिद्ध करें कि :

$$\frac{b^2}{a^2} > \frac{5}{8}$$

SECTION - V

खण्ड - V

9. (a) Find the resultant of two equal forces P each inclined at an angle 2α with each other.

दो समान बलों P का परिणाम ज्ञात करें, जिनमें से प्रत्येक एक दूसरे के साथ 2α कोण पर झुके हुए हैं।

- (b) State converse of Lami's theorem.

लैमी के प्रमेय का विलोम बताएँ।

- (c) Define co-efficient of friction and angle of friction.

घर्षण गुणांक और घर्षण कोण को परिभाषित करें।

- (d) Find the thrust of an inextensible rod.

एक अविस्तारणीय छड़ का थ्रस्ट ज्ञात करें।

- (e) Define null lines, null plane and null point.

शून्य रेखाएँ, शून्य तल और शून्य बिंदु को परिभाषित करें।

- (f) Find the equation of the conjugate line of the

given line $\frac{x-f}{l} - \frac{y-g}{m} - \frac{z-h}{n}$.

दी गई रेखा $\frac{x-f}{l} - \frac{y-g}{m} - \frac{z-h}{n}$ की संयुग्मी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।