Roll No. ....

92006

B.Sc. Mathematics 3rd Semester Examination – December, 2024

ADVANCED CALCULUS

Paper : BM-231

Time : Three hours] *[Maximum Marks : 40*

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt ***five*** questions in all, selecting ***one*** question from each Section. Question Number 9 (Section-V) is ***compulsory*** and carry 12 marks. Remaining questions are of 7 marks each.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न चुनते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) ***अनिवार्य*** है और 12 अंकों का है। शेष प्रत्येक प्रश्न 7 अंकों का है।

SECTION – I
खण्ड – I

1. (a) Find a, b, c such that :

$$\lim_{x \to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} = 2$$

a, b, c ज्ञात करें जैसे कि :

$$\lim_{x \to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} = 2$$

(b) Prove that every function defined and continuous on a closed interval is bounded in that interval.

सिद्ध करें कि बंद अंतराल पर परिभाषित और सतत प्रत्येक फलन उस अंतराल में परिबद्ध होता है।

2. (a) Find :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

ज्ञात करें :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(b) Prove that $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ is continuous at $x = 0$.

सिद्ध करें कि $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$, $x = 0$ पर सतत है।

SECTION – II

खण्ड – II

3. (a) Prove that the function $f : A \to R$, $(A \subset R^2)$ defined by $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & , \quad y \neq 0 \\ 0 & , \quad y=0 \end{cases}$ is continuous at (0, 0).

सिद्ध करें कि $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & , \quad y \neq 0 \\ 0 & , \quad y=0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : A \to R$, $(A \subset R^2)$, (0, 0) पर सतत है।

(b) Find the value of the parameter n so that $V=r^n(3\cos^2\theta-1)$ satisfies :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0$$

पैरामीटर n का मान ज्ञात करें ताकि $V=r^n(3\cos^2\theta-1)$ संतुष्ट हो :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0$$

4. (a) If $y^3-3ax^2+x^3=0$, prove that :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{2a^2x^2}{y^5}=0$$

यदि $y^3-3ax^2+x^3=0$, सिद्ध करें कि :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{2a^2x^2}{y^5}=0$$

(b) Expand $x^2y+3y-2$ in powers of $(x-1)$ and $(y+2)$ using Taylor's theorem upto third degree terms.

टेलर के प्रमेय का उपयोग करके $x^2y+3y-2$ को $(x-1)$ और $(y+2)$ की घातों में तृतीय डिग्री पदों तक विस्तारित करें।

SECTION – III

खण्ड – III

5. (a) State and prove Young's theorem.

यंग के प्रमेय को बताएँ और सिद्ध करें।

(b) Examine the differentiability of :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

निम्न की अवकलनीयता की जाँच करें :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

6. (a) Examine for maximum and minimum values the function given by $f(x,y)=x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$.

$f(x,y)=x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$ द्वारा दिए गए फलन के अधिकतम और न्यूनतम मानों की जाँच करें।

(b) Find a rectangular parallelepiped of greatest volume for a given total surface S.

किसी दिए गए कुल पृष्ठ S के लिए सबसे अधिक आयतन वाला एक आयताकार समांतरषट्फलक ज्ञात करें।

SECTION – IV

खण्ड – IV

7. (a) Express the curve $\vec{r} = e^t \cos t\hat{i} + e^t \sin t\hat{j} + e^t\hat{k}$ in the normal form.

वक्र $\vec{r} = e^t \cos t\hat{i} + e^t \sin t\hat{j} + e^t\hat{k}$ को सामान्य रूप में व्यक्त करें।

(b) Find the equation of osculating plane of the curve $x = 2 \log t, y = ut, z = 2t^2 + 1$.

वक्र $x = 2 \log t$, $y = ut$, $z = 2t^2 + 1$ के दोलन तल का समीकरण ज्ञात करें।

8. (a) Find the curvature and torsion of the helix $x = a \cos t, y = a \sin t, z = a + \tan \alpha$.

हेलिक्स $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = a + \tan \alpha$ की वक्रता और मरोड़ ज्ञात करें।

(b) Find the envelope of the sphere $(x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 + z^2 = b^2$.

गोले $(x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 + z^2 = b^2$ का आवरण ज्ञात करें।

SECTION – V

खण्ड – V

9. (a) Write the statement of Rolle's Theorem.

रोले के प्रमेय का कथन लिखें।

(b) If $z = x^3 + y^3 - 3axy$, find $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

यदि $z = x^3 + y^3 - 3axy$, तो $\frac{\partial z}{\partial y}$ ज्ञात करें।

(c) Define Involute and Evolute of curves.

वक्रों के प्रतिकेन्द्रज और केन्द्रज को परिभाषित करें।

(d) Define Saddle point.

सैडल पॉइंट को परिभाषित करें।

(e) Evaluate :

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

मूल्यांकन करें :

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

(f) Show that :

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x)$$

दिखाएँ कि :

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x)$$