B.Sc. 2nd Semester (Pass Course)

(Full and Re-appear) Examination, May–2023

MATH–III

Paper–BM-123

Vector Calculus

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each section. **Section–V is compulsory.***

नोट : प्रत्येक खण्ड से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पांच** प्रश्न कीजिए। **खण्ड–V अनिवार्य है।**

1. (a) Show that :- $[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ 4

(b) Prove that :- $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$ 3

(क) दर्शाइये कि :- $[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$$

2. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for the vector function $\vec{f}$ of a scalar variable t to have a constant magnitude is $\vec{f}.\frac{d\vec{f}}{dt} = 0$. 4

(b) A particle moves along the curve $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$, where t is time. Find the component of velocity and acceleration at t = 1 in the direction of $\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$. 3

(क) सिद्ध कीजिए कि एक अदिश चर t के सदिश फलन $\vec{f}$ के लिए एक स्थिर परिमाण होने की आवश्यक तथा पर्याप्त शर्त $\vec{f}.\frac{d\vec{f}}{dt} = 0$ है।

(ख) एक कण वक्र $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$ के साथ गति करता है, जहाँ t समय है। $\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ की दिशा में t = 1 पर वेग तथा त्वरण के घटक ज्ञात कीजिए।

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Show that $\nabla f(r) \times \vec{r} = 0$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. 4

(b) What is the greatest rate of increase of $\phi = xyz^2$ at the point (1, 0, 3) ? 3

(क) दर्शाइये कि $\nabla f(r) \times \vec{r} = 0$, जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

(ख) बिन्दु (1, 0, 3) पर $\phi = xyz^2$ की वृद्धि की वृहदतम दर क्या है ?

4. (a) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, then prove that div $(\hat{r}) = \frac{2}{r}$. 4

(b) Evaluate curl ($\vec{r}$ cos r), where r and $\vec{r}$ have their usual meaning. 3

(क) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ तब सिद्ध कीजिए कि div $(\hat{r}) = \frac{2}{r}$.

(ख) curl ($\vec{r}$ cos r) का मूल्यांकन कीजिए, जहां r तथा $\vec{r}$ का उनका सामान्य अर्थ है।

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Derive the formula of divergence of a vector point function $\vec{f}$ in terms of curvilinear co-ordinates. 4

(b) If $\psi = xyz$, evaluate $\nabla\psi$ in spherical co-ordinates. 3

(क) वक्ररेखीय निर्देशांकों के पदों में एक सदिश बिन्दु फलन $\vec{f}$ की अपसारिता के सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिए।

(ख) यदि $\psi = xyz$ हो तो गोलकीय निर्देशांकों में $\nabla\psi$ का मूल्यांकन कीजिए।

6. (a) Evaluate $\oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$ along the circle C represented by $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$. 4

(b) Prove that

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_{\phi}) = -\sin\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_r - \cos\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_{\theta}.$$ 3

(क) $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ द्वारा निरूपित वृत्त C के साथ-साथ $\oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_{\phi}) = -\sin\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_r - \cos\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_{\theta}.$$

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Evaluate $\oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$ along the circle C represented by $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.

(4)

(b) If $\vec{f} = 2y\hat{i} - z\hat{j} + x^2 k$ and S is the surface of the parabolic cylinder $y^2 = 8x$ in the first octant bounded by $y = 4$ and $z = 6$, then evaluate $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$. 3

(क) $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ द्वारा निरूपित वृत्त C के साथ-साथ $\oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए।

(ख) यदि $\vec{f} = 2y\hat{i} - z\hat{j} + x^2 k$ तथा S ; y = 4 और z = 6 से आबद्ध पहले अष्टांश में परवलयिक बेलन $y^2 = 8x$ की सतह है, तब $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$ का मूल्यांकन कीजिए।

8. (a) Verify divergence theorem for :

$\vec{f} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ taken over the region in the first octant bounded by $y^2 + z^2 = 9$ and $x = 2$. 4

(b) Evaluate by Green's theorem

$$\oint_C (\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y\, dy,$$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$. 3

(क) $y^2 + z^2 = 9$ तथा $x = 2$ द्वारा आबद्ध प्रथम अष्टांश में क्षेत्र पर लिए गए $\vec{f} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ के लिए अपसारिता प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

(ख) ग्रीन के प्रमेय द्वारा मूल्यांकन कीजिए :

$$\oint_C (\cos x \sin y - xy)\,dx + \sin x \cos y\,dy.$$

जहाँ C वृत्त $x^2 \quad y^2 = 1$ है।

Section–V

खण्ड–V

9. (a) Evaluate : $\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{k}) + (\hat{i} + \hat{k}) \cdot \hat{j}$ 2

मूल्यांकन कीजिए : $\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{k}) + (\hat{i} + \hat{k}) \cdot \hat{j}$

(b) Show that $\vec{a} \cdot \vec{a}' = 1$, where $\vec{a}'$ is the reciprocal vector of $\vec{a}$. 2

दर्शाइये कि $\vec{a} \cdot \vec{a}' = 1$, जहाँ $\vec{a}'$; $\vec{a}$ का व्युत्क्रम सदिश है।

(c) Define cylindrical co-ordinates. 2

बेलनाकार निर्देशांकों को परिभाषित कीजिए।

(d) Show that $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$. 2

दर्शाइये कि $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$

(e) If $\vec{a}$ is a constant vector and $\vec{f} = \vec{a} \times \vec{r}$, prove that div $\vec{f} = 0$. 2

यदि $\vec{a}$ एक स्थिर सदिश है तथा $\vec{f} = \vec{a} \times \vec{r}$, सिद्ध कीजिए कि div $\vec{f} = 0$

(f) Show that $\iint_S \hat{n}\, dS = 0$ for any closed surface S. 2

दर्शाइये कि, किसी बन्द सतह S के लिए

$$\iint_S \hat{n}\, dS = 0$$