

Roll No. ....

**SECTION - I**

**खण्ड - I**

**91580**

**B. Sc. 2nd Sem. (Math) (Pass Course)  
Examination - April, 2018**

**VECTOR CALCULUS MATH - III**

Paper : BM-123

**Time : Three Hours ] [ Maximum Marks : 40**

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

**Note :** Attempt five questions in all choosing one question from each Section. Question No. 9 (Section - V) is compulsory.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) अनिवार्य है।

1. (a) Let  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  be three non-coplaner vector and  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  be the reciprocal vector then for any vector  $\vec{r}$ , show that  $\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{r} \cdot \vec{b})\vec{b} + (\vec{r} \cdot \vec{c})\vec{c}$ . 3

माना  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  तीन मैट-समकालीन वेक्टर है तथा  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  व्युत्क्रम वेक्टर है तब किसी वेक्टर  $\vec{r}$  हेतु दिखाइए कि  $\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{r} \cdot \vec{b})\vec{b} + (\vec{r} \cdot \vec{c})\vec{c}$

- (b) Prove that :

$$[\vec{p} \times \vec{q} \quad \vec{q} \times \vec{r} \quad \vec{r} \times \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{p} & \vec{p} \cdot \vec{q} & \vec{p} \cdot \vec{r} \\ \vec{q} \cdot \vec{p} & \vec{q} \cdot \vec{q} & \vec{q} \cdot \vec{r} \\ \vec{r} \cdot \vec{p} & \vec{r} \cdot \vec{q} & \vec{r} \cdot \vec{r} \end{vmatrix} = [\vec{p} \quad \vec{q} \quad \vec{r}]^2 \quad 4$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$[\vec{p} \times \vec{q} \quad \vec{q} \times \vec{r} \quad \vec{r} \times \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{p} & \vec{p} \cdot \vec{q} & \vec{p} \cdot \vec{r} \\ \vec{q} \cdot \vec{p} & \vec{q} \cdot \vec{q} & \vec{q} \cdot \vec{r} \\ \vec{r} \cdot \vec{p} & \vec{r} \cdot \vec{q} & \vec{r} \cdot \vec{r} \end{vmatrix} = [\vec{p} \quad \vec{q} \quad \vec{r}]^2$$

2. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for a vector function  $\vec{f}$  of a scalar variable t to have constant direction is  $\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$ . 3

सिद्ध कीजिए कि नियतांक दिशा वाले आदिश चर  $t$  के वेक्टर

फलन  $\vec{f}$  हेतु आवश्यक तथा पर्याप्त शर्त  $\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$  है।

- (b) A particle moves along the curve  $x = 3t^2 - 2$ ,  $y = 2t - t^2$ ,  $z = t^3 + 4$ . Find the velocity and acceleration at  $t = 2$ . 4

एक कण वक्र  $x = 3t^2 - 2$ ,  $y = 2t - t^2$ ,  $z = t^3 + 4$  के समानान्तर गति करता है तो  $t = 2$  पर वेग तथा त्वरण को ज्ञात कीजिए।

### SECTION - II

#### खण्ड - II

3. (a) If  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  and  $|\vec{r}| = r$  then prove that  $\text{div}(\vec{r}^m \vec{r}) = (m+3)r^m$ . 4

यदि  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  रूप  $|\vec{r}| = r$  को सिद्ध कीजिए कि  $\text{div}(\vec{r}^m \vec{r}) = (m+3)r^m$

- (b) If  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  and  $\vec{b}$  is constant vector then find  $\text{curl}(\vec{b} \times \vec{r})r^n$ . 3

यदि  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  एवं  $\vec{b}$  नियतांक वेक्टर है तो  $\text{curl}(\vec{b} \times \vec{r})r^n$  को ज्ञात कीजिए।

4. (a) Find the equation of tangent plane and normal to the surface  $z = x^2 + y^2$  at the point  $(1, -2, 5)$ . 3

बिन्दु  $(1, -2, 5)$  पर पृष्ठ  $z = x^2 + y^2$  के अभिलम्ब तथा स्पर्शी समतल के समीकरण को ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the values of constants  $p$  and  $q$  so that the surfaces  $px^2 - qyz = (p+2)x$  will be orthogonal to the surface  $4x^2y + z^3 = 9$  at the point  $(1, -2, 1)$ . 4

नियतांक  $p$  एवं  $q$  के मान को ज्ञात कीजिए जिससे पृष्ठ  $px^2 - qyz = (p+2)x$  बिन्दु  $(1, -2, 1)$  पर पृष्ठ  $4x^2y + z^3 = 9$  के लम्बकोणीय होगा।

### SECTION - III

#### खण्ड - III

5. (a) Find the value of curl of a vector function  $\vec{f}$  in terms of orthogonal curvilinear co-ordinates. 3

लम्बकोणीय वक्ररेखीय निर्देशांक के अनुसार वेक्टर फलन  $\vec{f}$  के कर्ल के मान को ज्ञात कीजिए।

- (b) If  $u = 3x + 4$ ,  $v = y - 3$ ,  $w = z + 2$  show that  $u$ ,  $v$ ,  $w$  are orthogonal and find  $(ds)^2$ . Also find the scale factors  $h_1, h_2, h_3$ . 4

यदि  $u = 3x + 4, v = y - 3, w = z + 2$  तो दिखाइए कि  $u, v$  लम्बकोणीय है तथा  $(ds)^2$  को ज्ञात कीजिए। स्केल गुणनखण्ड  $h_1, h_2, h_3$  को भी ज्ञात कीजिए।

6. (a) Express the following vectors in cylindrical coordinates.

$$\vec{f} = xy\hat{i} + 3yz\hat{j} + (z^2 - yz)\hat{k} \quad 4$$

निम्न वेक्टरों को बेलनाकार निर्देशांक

$$\vec{f} = xy\hat{i} + 3yz\hat{j} + (z^2 - yz)\hat{k} \text{ में व्यक्त कीजिए।}$$

- (b) Prove that spherical co-ordinate system is self reciprocal. 3

सिद्ध कीजिए कि गोलीय निर्देशांक प्रभावी व्युत्क्रम है।

### SECTION - IV

#### खण्ड - IV

7. (a) Find the workdone in moving a particle once round a circle C in xy - plane having centre at origin and radius 3. If the force field is  $\vec{f} = (2x - 4y + 3z)\hat{i} + (x + 2y - z)\hat{j} + (3x - 2y - 5z)\hat{k}$ . 3

उद्गम तथा त्रिज्या 3 पर केन्द्र वाले xy समतल में वृत्त C का एक चक्कर कण के गति करने में किये गये कार्य को ज्ञात कीजिए यदि बल क्षेत्र

$$\vec{f} = (2x - 4y + 3z)\hat{i} + (x + 2y - z)\hat{j} + (3x - 2y - 5z)\hat{k} \text{ है।}$$

- (b) Verify Gauss divergence theorem for  $\vec{f} = 2xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 3yz\hat{k}$  over the surface of the cube bounded by  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ . 4

$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$  द्वारा परिबद्ध घन के पृष्ठ पर  $\vec{f} = 2xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 3yz\hat{k}$  हेतु गॉस डाइवर्जेंस प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

8. (a) Verify Green's theorem in plane for  $\oint_C (xy + y^2)dx + x^2dy$ , where C is the closed curve of the region bounded by  $y = x, y = x^2$ . 3

$\oint_C (xy + y^2)dx + x^2dy$  हेतु समतल में ग्रीन प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ C  $y = x, y = x^2$  द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का अवरुद्ध वक्र है।

- (b) Using stoke's theorem, evaluate 4

$\oint_C (2x + 2y)dx + (2x - z)dy + (y + z)dz$  where C is the boundary of the triangle with vertices (1,0,0), (0,3,0) and (0,0,4).

स्टोक के प्रमेय का प्रयोग करते हुए मान निकालिए  
 $\int_C (2x + 2y)dx + (2x - z)dy + (y + z)dz$  जहाँ C लम्ब  
 $(1,0,0)$ ,  $(0,3,0)$  और  $(0,0,4)$  उसके साथ त्रिकोण की परिसीमा  
 है।

**SECTION - V**

**खण्ड - V**

9. (a) If S is any closed surface enclosing a volume V  
 and  $\vec{f} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$  then show that  
 $\iiint_S \vec{f} \cdot \hat{n} \, ds = 6V$ . 2

यदि S आयतन V एवं  $\vec{f} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$  को परिवेष्ट करते  
 हुए कोई अवरुद्ध पृष्ठ है तो दिखाइए कि  $\iiint_S \vec{f} \cdot \hat{n} \, ds = 6V$ ।

(b) Describe the following curve in rectangular Co-  
 ordinates, which is given in cylindrical Co-  
 ordination  $P = 3, z = 0$ . 2

निम्न वक्र का वर्णन आयताकार निर्देशांक में कीजिए जिसे  
 बेलनाकार निर्देशांक  $P = 3, z = 0$  में दिया गया है।

(c) If  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , find  $\nabla \theta$ . 2  
 यदि  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ ,  $\nabla \theta$  को ज्ञात कीजिए।

(d) Evaluate  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right]$  2

मान निकालिए  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right]$

(e) What is the greatest rate of increase of 2  
 $u = xyz^2$  at the point  $(0,1,2)$

बिन्दु  $(0,1,2)$  पर  $u = xyz^2$  के वृद्धि की अधिकतम दर क्या है ?

(f) If  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  then find  $\text{div } \vec{r}$  2  
 यदि  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  तो  $\text{div } \vec{r}$  को ज्ञात कीजिए।