Roll No. ....

34213

Discipline Specific Courses 1st Sem. (Bachelor of Science (Math) -4Year) w.e.f. 2024-25 as Per (NEP-2020) Examination – December, 2024

VECTOR CALCULUS

Paper : 24MATS401DS02

Time : Three hours] *[Maximum Marks : 70*

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt ***five*** questions in all, selecting ***one*** question from each Section. Question No. **1** (Section-**I**) is ***compulsory***. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न चुनते हुए कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1 (खण्ड-I) ***अनिवार्य*** है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

SECTION – I

खण्ड I

1. (a) Find the volume of parallelopiped whose edges are represented by $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

उस समांतर चतुर्भुज का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारों को $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ द्वारा दर्शाया गया है।

(b) Evaluate div $\vec{f}$, where $\vec{f} = 2x^2z\hat{i} - xy^2z\hat{j} + 3y^2x\hat{k}$ at (1, 1, 1).

div $\vec{f}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ (1, 1, 1) पर $\vec{f} = 2x^2z\hat{i} - xy^2z\hat{j} + 3y^2x\hat{k}$

(c) Show that $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3\pi$, given that $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$ and C being the arc of the curve $\vec{r} = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + t\hat{k}$ from $t = 0$ to $t = 2\pi$.

दर्शाइए कि $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3\pi$, दिया है, $t = 2\pi$ पर $t = 0$ से कर्व $\vec{r} = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + t\hat{k}$ के चाप $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$ और C के अस्तित्व में है।

(d) If S is any closed surface enclosing a volume V and $\vec{f} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$, then show that $\iint_S \vec{f}.\hat{n}dS = 6V$.

यदि S कोई बंद सतह है जो आयतन V और $\vec{f} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$ को घेरे हुए है, तो दर्शाइए कि $\iint_S \vec{f}.\hat{n}dS = 6V$ है।

SECTION – II

खण्ड II

2. (a) Show that :

$$[\vec{a}\times\vec{b} \quad \vec{b}\times\vec{c} \quad \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2$$

दर्शाइए कि :

$$[\vec{a}\times\vec{b} \quad \vec{b}\times\vec{c} \quad \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2$$

(b) A particle moves along the curve $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$, where t is time. Find the components of velocity and acceleration at $t = 1$ in the direction $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$.

एक कण वक्र $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$ के अनुदिश गति करता है, जहाँ t समय है। $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ दिशा में $t = 1$ पर वेग और त्वरण के घटकों को ज्ञात कीजिए।

3. (a) Find the angle of intersection at (4, –3, 2) of spheres $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z - 4 = 0$.

गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ और $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z - 4 = 0$ का (4, –3, 2) पर प्रतिच्छेद कोण ज्ञात कीजिए।

(b) Find the equation of tangent plane and normal to the surface $xyz = 4$ at the point (1, 2, 2).

बिंदु (1, 2, 2) पर सतह $xyz = 4$ के स्पर्शी तल और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

SECTION – III

खण्ड III

4. (a) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, prove that :

$$div(r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$$

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ और $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, सिद्ध कीजिए कि :

$$div(r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$$

(b) Find curl $\{\vec{r} f(r)\}$, where $f(r)$ is differentiable and $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}|$.

curl $\{\vec{r} f(r)\}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(r)$ अवकलनीय है और $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ और $r = |\vec{r}|$।

5. (a) Evaluate $\iint_R xy^5\,dxdy$, where $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,$ $x \le y \le 1 - x\}$.

मूल्यांकन कीजिए $\iint_R xy^5\,dxdy$, जहाँ $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1 - x\}$।

(b) Evaluate $\iiint_R z(x^2 + y^2)\,dxdydz$, where $R = \{(x, y, z) : -1 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le 4\}$.

मूल्यांकन कीजिए $\iiint_R z(x^2 + y^2)\,dxdydz$, जहाँ $R = \{(x, y, z) : -1 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le 4\}$।

SECTION – IV
खण्ड – IV

6. (a) Evaluate $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, where $\vec{f} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$, the curve C is the rectangle in xy-plane bounded by $x = 0, y = b, x = a, y = 0$.

$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ का मूल्यांकन करें, जहाँ $\vec{f} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$, वक्र C, $x = 0$, $y = b$, $x = a$, $y = 0$ द्वारा घिरे xy-तल में आयत है।

(b) Find the work done in moving a particle in a field of force given by $\vec{f} = 3x^2 + (2xz - y)\hat{j} + 3\hat{k}$ along the line joining the points (0, 0, 0) and (3, 1, 4).

बिंदुओं (0, 0, 0) और (3, 1, 4) को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश दिए गए बल $\vec{f} = 3x^2 + (2xz - y)\hat{j} + 3\hat{k}$ के क्षेत्र में एक कण को ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

7. (a) State and prove Green's theorem.

ग्रीन के प्रमेय को बताएँ और सिद्ध करें।

(b) Evaluate by Green's theorem :

$$\oint_C e^{-x}(\sin y\,dx + \cos y\,dy),$$

where C is the rectangle with vertices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ग्रीन के प्रमेय द्वारा मूल्यांकन करें :

$$\oint_C e^{-x}(\sin y\,dx + \cos y\,dy),$$

जहाँ C शीर्षों $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ आयत है।

SECTION – V

खण्ड – V

8. (a) Evaluate by Stoke's theorem :

$$\oint_C (\sin z dx - \cos x dy + \sin y dz),$$

where C is the boundary of the rectangle $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $z = 3$.

स्टोक के प्रमेय द्वारा मूल्यांकन करें :

$$\oint_C (\sin z dx - \cos x dy + \sin y dz),$$

जहाँ C आयत $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1, z = 3$ की सीमा है।

(b) Verify Stoke's theorem for the function $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$ integrated round the square whose sides are $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ and $y = a$ in the plane $z = 0$.

समतल $z = 0$ में $x = 0, y = 0, x = a$ और $y = a$ भुजाओं वाले वर्ग के चारों ओर समाकलित फलन $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$ के लिए स्टोक के प्रमेय को सत्यापित करें।

9. (a) Prove that :

$$\iiint_V \frac{1}{r^2} dV = \iint_S \frac{\vec{r}.\hat{n}}{r^2} dS,$$

where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $|\vec{r}| = r$.

सिद्ध करें कि :

$$\iiint_V \frac{1}{r^2} dV = \iint_S \frac{\vec{r}.\hat{n}}{r^2} dS,$$

जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ और $|\vec{r}| = r$.

(b) Verify Gauss divergence theorem for $\vec{f} = 2xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 3yz\hat{k}$ over the surface of the cube bounded by $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2$.

$0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2$ से घिरे घन की सतह पर गॉस विचलन प्रमेय $\vec{f} = 2xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 3yz\hat{k}$ को सत्यापित करें।
