

Roll No.

34212

Discipline Specific Courses 1st Sem.

(Bachelor of Science) (Math) 4-Year

w. e. f. 2024-25 as per (NEP-2020)

Examination – December, 2024

FUNCTIONS AND ALGEBRA

Paper : 24MATS401DS01

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Question No. 1 (Section - I) is *compulsory*. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1 (खण्ड - I) अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

34212-450-(P-8)(Q-9)(24)

P. T. O.

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) Find the domain and range of the function
 $f(x) = 1 - |x - 2|$.

फलन $f(x) = 1 - |x - 2|$ का प्रांत और परास ज्ञात करें।

- (b) Given that -4 is a root of the equation
 $2x^3 + 6x^2 + 7x + 60 = 0$. Find the other roots.

दिया है कि -4 समीकरण $2x^3 + 6x^2 + 7x + 60 = 0$ का एक मूल है अन्य मूल ज्ञात करें।

- (c) Prove that diagonal elements of a Hermitian matrix are real.

सिद्ध करें कि हर्मिटियन मैट्रिक्स के विकर्ण तत्व वास्तविक हैं।

- (d) Define Characteristic Matrix and Characteristic Equation.

अभिलाक्षणिक आव्यूह और अभिलाक्षणिक समीकरण को परिभाषित करें।

34212-450-(P-8)(Q-9)(24)

(2)

SECTION - II

खण्ड - II

2. (a) In the set of integers, let a relation R be defined as aRb if and only if $a - b$ is even. Prove that R is an equivalence relation.

पूर्णाकों के सेट में, एक संबंध R को aRb के रूप में परिभाषित करें यदि और केवल यदि $a - b$ सम है। सिद्ध करें कि R एक तुल्यता संबंध है।

- (b) Show that $f: N \rightarrow N$, given by

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{if } x \text{ is odd} \\ x-1, & \text{if } x \text{ is even} \end{cases} \text{ is both one-one and onto.}$$

दिखाएँ कि $f: N \rightarrow N$, द्वारा दिया गया

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{if } x \text{ is odd} \\ x-1, & \text{if } x \text{ is even} \end{cases} \text{ एक-एक और आच्छादक दोनों हैं।}$$

3. (a) If $f: X \rightarrow Y$, is one-one and onto, then $f^{-1}: Y \rightarrow X$ is also one-one and onto.

यदि $f: X \rightarrow Y$, एक-एक और आच्छादक है, तो $f^{-1}: Y \rightarrow X$ एक-एक और आच्छादक भी है।

- (b) If $f: N \rightarrow Y$ be a function defined by $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ and $Y = \text{range}(f)$. Show that f is invertible and find f^{-1} .

यदि $Y = \text{परास (रेंज)} (f)$ तथा $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ द्वारा परिभाषित फंक्शन $f: N \rightarrow Y$ है, तो दिखाएँ कि f व्युत्क्रमणीय है और f^{-1} ज्ञात करें।

SECTION - III

खण्ड - III

4. (a) Find the condition that the sum of two roots of the equation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ is equal to zero.

वह शर्त ज्ञात करें कि समीकरण $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ के दो मूलों का योग शून्य के बराबर है।

- (b) Show that same transformation can remove both second and fourth terms of the equation $x^4 + 16x^3 + 83x^2 + 152x + 84 = 0$ and hence solve it.

दिखाएँ कि समान परिवर्तन समीकरण
 $x^4 + 16x^3 + 83x^2 + 152x + 84 = 0$ के दूसरे और चौथे
 दोनों पदों को हटा सकता है और इसलिए इसे हल करें।

5. (a) Solve the equation $x^3 - 12x - 65 = 0$ by Cardon method.

कार्डन विधि द्वारा समीकरण $x^3 - 12x - 65 = 0$ को हल करें।

- (b) Solve the following equation by Descarte's method : $x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = 0$.

डेसकार्टे की विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरण को हल करें :

$$x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = 0$$

SECTION - IV

खण्ड - IV

6. (a) Every square matrix is uniquely expressible as the sum of a Hermitian and a Skew-Hermitian matrix.

प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक हर्मिटियन और एक रक्यू-हर्मिटियन आव्यूह के योग के रूप में विशिष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है।

- (b) Reduce the given matrix A to the row-echelon form and hence find the row rank of A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

दिए गए मैट्रिक्स A को पंक्ति-सोपानक-प्रपत्र से घटाएँ और इसलिए A की पंक्ति रैंक ज्ञात करें :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

7. (a) Reduce the following matrix to the normal

form $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

निम्नलिखित आव्यूह को सामान्य रूप में घटाएँ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) Check the consistency of the following system of equations. Also find the solution if consistent :

$$x + 2y - z = 3$$

$$3x - y + 2z = 1$$

$$2x - 2y + 3z = 2$$

समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली की संगति की जाँच करें। यदि संगत हो, तो समाधान भी ज्ञात करें :

$$x + 2y - z = 3$$

$$3x - y + 2z = 1$$

$$2x - 2y + 3z = 2$$

SECTION - V

खण्ड - V

8. (a) Find the characteristic roots and characteristic

vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल और अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात करें :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- (b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ के लिए कैली-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित करें।

9. (a) Prove that the absolute value of each characteristic root of unitary matrix is unity.

सिद्ध करें कि एकात्मक आव्यूह के प्रत्येक अभिलाक्षणिक मूल का निरपेक्ष मान एकता है।

- (b) Diagonalizable, if possible the matrix $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

यदि संभव हो तो आव्यूह $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ विकर्णीय है।